ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TẠ THỊ MẠNH

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI CARTAN - NOCHKA TRONG LÝ THUYẾT PHÂN BỐ GIÁ TRỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TẠ THỊ MẠNH

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI CARTAN - NOCHKA TRONG LÝ THUYẾT PHÂN BỐ GIÁ TRỊ

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TSKH TRẦN VĂN TẤN

THÁI NGUYÊN - 2016

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả trình bày trong luận văn này là không bị trùng lặp với các luận văn trước đây. Tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, 6 tháng 6 năm 2016

Tác giả luận văn

TẠ THỊ MẠNH

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành, sâu sắc tới PGS. TSKH Trần Văn Tấn, thầy là người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, 6 tháng 6 năm 2016

Tác giả luận văn

TẠ THỊ MẠNH

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

MỞ ĐẦU **1**

1 Trọng Nochka **2**

1.1 Họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát 2

1.2 Trọng Nochka 2

2 Định lý cơ bản thứ hai Cartan - Nochka **14**

2.1 Các hàm cơ bản và Bổ đề đạo hàm logarit 14

2.1.1 Các hàm cơ bản trong Lý thuyết Nevanlinna - Cartan 14

2.1.2 Hàm phân hình và ánh xạ phân hình 15

2.1.3 Bổ đề đạo hàm Logarit 19

2.1.4 Wronskian tổng quát của ánh xạ phân hình 21

2.2 Định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ phân hình 26

2.3 Quan hệ số khuyết 31

Kết luận **34**

Tài liệu tham khảo **35**

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

MỞ ĐẦU

Năm 1929, Nevanlinna công bố bài báo nghiên cứu sự phân bố giá trị của các hàm phân hình trên mặt phẳng phức. Vấn đề này sau đó nhanh chóng được mở rộng sang trường hợp ánh xạ chỉnh hình từ mặt phẳng phức vào không gian xạ ảnh bởi Cartan. Kể từ đó tới nay, việc nghiên cứu sự phân bố giá trị của ánh xạ chỉnh hình với các trường hợp khác nhau liên tục thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học và hình thành một lý thuyết được gọi là Lý thuyết phân bố giá trị hay còn gọi là Lý thuyết Nevanlinna. Nội dung cốt lõi của Lý thuyết này gồm hai định lý chính, được gọi là các định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai. Trong khi định lý cơ bản thứ nhất đã được giải quyết tương đối đầy đủ trong các trường hợp, thì định lý cơ bản thứ hai mới được thiết lập trong rất ít các trường hợp. Để có thể tiếp cận được tới các vấn đề có tính thời sự của Lý thuyết phân bố giá trị, trong luận văn này, tôi tập trung tìm hiểu một trong những kết quả gốc của Lý thuyết phân bố giá trị. Theo đó, tôi chọn tìm hiểu định lý cơ bản thứ hai Cartan- Nochka. Trên thực tế, năm 1933, Cartan mở rộng kết quả của Nevanlinna sang trường hợp chiều cao, ở đó ông thiết lập định lý cơ bản thứ hai cho trường hợp đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính trong không gian xạ ảnh. Cartan cũng nêu giả thuyết cho trường hợp đường cong khác hằng tùy ý trong không gian xạ ảnh. Giả thuyết của Cartan tồn tại 50 năm và được Nochka giải quyết năm 1983. Trong luận văn này tôi dự định tìm hiểu kết quả này của Nochka.

Chính vì vậy mà tôi chọn đề tài "Định lý cơ bản thứ hai Cartan-Nochka trong lý thuyết phân bố giá trị". Luận văn gồm hai chương:

Chương 1. Trọng Nochka.

Chương 2. Định lý cơ bản thứ hai Cartan - Nochka.

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

Chương 1

Trọng Nochka

1.1 Họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát

Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, cố định một hệ tọa độ thuần nhất $\omega = (\omega_0 : ... : \omega_n)$. Cho q siêu phẳng H_j xác định bởi các phương trình thuần nhất:

$$H_j : \sum_{i=0}^{n} h_{ij}\omega_j = 0,\ j = 1, ..., q.$$

Với $Q = \{1, ..., q\}$ và $R \subset Q$, ta đặt $|R|$= số phần tử của R.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử $N \geq n$ và $q \geq N+1$. Ta nói họ $\{H\}_{i=1}^{q}$ ở vị trí N - dưới tổng quát nếu với bất kì $R \subset Q$ với $|R| = N+1$ thì

$$\bigcap_{j \in R} H_j = \emptyset.$$

Nếu họ siêu phẳng ở vị trí n - dưới tổng quát thì ta nói đơn giản rằng nó ở vị trí tổng quát. Dễ thấy rằng $\{H_j\}_{j=1}^{q}$ ở vị trí N - dưới tổng quát khi và chỉ khi

$$rank(h_{jk})_{j \in R, 0 \leq k \leq n} = n+1\ \forall R \subset Q \quad \text{với } |R| = N+1.$$

1.2 Trọng Nochka

Với các kí hiệu như trên và $R \subset S \subset Q$, ta có các định nghĩa sau:
$V(R)$= không gian véc tơ con của $\mathbb{C}^{n+1}$ sinh bởi các véc tơ $(h_{jk})_{0 \leq k \leq n}$, $j \in R$,
$rk(R) = \dim V(R)$, $rk(\emptyset) = 0$,
$rk_R(S) = rk(S) - rk(R)$,

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

$sl_R(S) = \frac{rk(S)-rk(R)}{|S|-|R|}$, với $|S| > |R|$.

Bổ đề 1.2.1. *Cho họ siêu phẳng $\{H_j\}_{j=1}^q$ ở vị trí N - dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó*

(i) Với $R \subset Q$, $i = 1,2$

$$rk_R(S_1 \cup S_2) + rk_R(S_1 \cap S_2) \leq rk_R(S_1) + rk_R(S_2).$$

(ii) Với $R \subset S \subset Q$, $|S| \leq N+1$

$$|R| - rank(R) \leq |S| - rank(S) \leq N - n.$$

Chứng minh

(i) Ta có

$$\begin{aligned} rk_R(S_1 \cup S_2) + rk_R(S_1 \cap S_2) &= rk(S_1 \cup S_2) - rk(R) + rk(S_1 \cap S_2) - rk(R) \\ &= \dim(V(S_1) + V(S_2)) + \dim(V(S_1) \cap V(S_2)) - 2\dim V(R) \\ &\leq \dim V(S_1) + \dim V(S_2) - 2\dim V(R) \\ &= rk_R(S_1) + rk_R(S_2). \end{aligned}$$

(ii) Theo phần (i)

$$\begin{aligned} rk(S) &= rk(R \cup (S \setminus R)) \leq rk(R) + rk(S \setminus R) \\ &= rk(R) + |S \setminus R| = rk(R) + |S| - |R|. \end{aligned}$$

Vậy ta có bất đẳng thức thứ nhất.

Lấy $S' \subset Q$, $S \subset S'$ sao cho $|S'| = N+1$. Từ định nghĩa N - dưới tổng quát ta có

$$|S| - rk(S) \leq |S'| - rk(S') = N - n.$$

Bổ đề 1.2.2. *Cho họ siêu phẳng $\{H_j\}_{j=1}^q$ ở vị trí N - dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $N > n$, $q > 2N - n + 1$. Khi đó tồn tại các tập con N_i, $i = 0, ..., s$ của*

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

Q thỏa mãn

(i) $N_0 = \emptyset \subset N_1 \subset \ldots \subset N_s$, $rk(N_s) < n+1$.

(ii) $0 < sl_{N_0}N_1 < sl_{N_1}N_2 < \ldots < sl_{N_{s-1}}N_s < \frac{n+1-rk(N_s)}{2N-n+1-|N_s|} < 1$.

(iii) Với $1 \leq i \leq s$ *và* $N_{i-1} \subset R \subset Q$, *nếu* $rk(N_{i-1}) < rk(R) < n+1$ *thì*

$$sl_{N_{i-1}}(N_i) \leq sl_{N_{i-1}}(R),$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $R \subset N_i$.

(iv) Với $N_s \subset R \subset Q$ *và* $rk(N_s) < rk(R) < n+1$,

$$sl_{N_s}(R) \geq \frac{n+1-rk(N_s)}{2N-n+1-|N_s|}.$$

Chứng minh

Ta đặt $N_0 = \emptyset$, chúng ta sẽ xác định N_i bằng phương thức quy nạp như sau. Giả sử ta đã chọn được $\{N_i\}_{i=0}^{s}$ thỏa mãn $(i) \sim (iii)$. Nếu chúng thỏa mãn (iv) thì đó là họ cần dựng. Ngược lại ta cần phải tìm một tập con $N_{s+1} \subset Q$ sao cho $N_s \subset N_{s+1}$ và $\{N_i\}_{i=1}^{s+1}$ thỏa mãn $(i) \sim (iii)$.

Vì H_i ở vị trí N - dưới tổng quát nên $rk(N_s) < n+1$ chứng tỏ rằng $|N_s| \leq N$. Do đó theo Bổ đề 1.2.1 thì $|N_s| - rk(N_s) \leq N - n < 2N - 2n$. Do đó

$$\begin{aligned}
&n - rk(N_s) < 2N - n - |N_s| \\
&\Leftrightarrow n+1-rk(N_s) < 2N-n+1-|N_s| \\
&\Leftrightarrow \frac{n+1-rk(N_s)}{2N-n+1-|N_s|} < 1
\end{aligned}$$

Giả sử rằng (iv) không đúng. Đặt

$$\mathscr{R} = \{R : N_s \subset R \subset Q, rk(N_s) < rk(R) < n+1\}.$$

Khi đó $\mathscr{R} \neq \emptyset$. Nếu $R \in \mathscr{R}$, $|R| \leq N$. Theo giả sử (iv) không đúng, với $\varepsilon_0 = \min\{sl_{N_s}(R) : R \in \mathscr{R}\}$, ta có

$$\varepsilon < \frac{n+1-rk(N_s)}{2N-n+1-|N_s|} < 1 \tag{1.2.1}$$

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn

Theo (iii) ta có $sl_{N_{s-1}}(N_s) \leq sl_{N_{s-1}}(R), \forall R \in \mathscr{R}$. Do vậy

$$sl_{N_s}(R) = \frac{rk(R) - rk(N_s)}{|R| - |N_s|} = \frac{rk(R) - rk(N_{s-1}) - (rk(N_s) - rk(N_{s-1}))}{(|R| - |N_{s-1}|) - (|N_s| - |N_{s-1}|)}$$
$$> \frac{rk(N_s) - rk(N_{s-1})}{|N_s| - |N_{s-1}|} = sl_{N_{s-1}}(N_s).$$

Đặt $\mathscr{R}' = \{R \in \mathscr{R} : sl_{N_s}(R) = \varepsilon_0\}$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng $R_1, R_2 \in \mathscr{R}'$ thì $R_1 \cup R_2 \in \mathscr{R}'$. Thực vậy, vì $R_1, R_2 \in \mathscr{R}'$ nên $\varepsilon_0 = sl_{N_s}(R_1) = sl_{N_s}(R_2)$, suy ra

$$\begin{aligned}
rk(R_1) + rk(R_2) - 2rk(N_s) &= rk(R_1) - rk(N_s) + rk(R_2) - rk(N_s) \\
&= \varepsilon_0(|R_1| - |N_s| + |R_2| - |N_s|) \\
&\leq \varepsilon_0(rk(R_1) + N - n + rk(R_2) + N - n - 2|N_s|) \\
&= \varepsilon_0(rk(R_1) + rk(R_2) + 2N - 2n - 2|N_s|) \\
&= \varepsilon_0(rk(R_1) + rk(R_2) - 2rk(N_s) + \\
&+ 2N - 2n - 2|N_s| + 2rk(N_s)).
\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
rk(R_1) + rk(R_2) - 2rk(N_s) &\leq \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0}(2N - 2n - 2|N_s| + 2rk(N_s)) \\
&= (\frac{1}{1 - \varepsilon_0} - 1)(2N - 2n - 2|N_s| + 2rk(N_s)) \\
&< \frac{(n + 1 - rk(N_s))(2N - 2n - 2|N_s| + 2rk(N_s))}{2N - 2n - |N_s| + rk(N_s)} \\
&\leq n + 1 - rk(N_s) \text{ (vì } |N_s| \leq rk(N_s)).
\end{aligned}$$

Như vậy ta có

$$\begin{aligned}
rk(R_1 \cup R_2) &\leq rk(R_1) + rk(R_2) - rk(R_1 \cap R_2) \\
&\leq rk(R_1) + rk(R_2) - rk(N_s) < n + 1.
\end{aligned}$$

S hóa bi Trung tâm Hc liu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn